Correction des exercices d'entrainement

Exercice 1 :

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-4; 9]$.
2. **a)** L'image de 5 par la fonction f est -3.
   b) $f(-2) = 8$.
3. **a)** Les antécédents de 0 par la fonction f sont : 2, 6 et 8.
   b) -7 n'a pas d'antécédent par la fonction f.
4. **a)** L'équation $f(x) = 2$ a deux solutions 1,5 et 7.
   b) $f(x) > 2$ pour $x \in [-4; 1{,}5[$
5.

x	-4	-2	4	7	9
$f(x)$	6	8	- 4	2	-6

6. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 9] est 2 et il est atteint pour $x = 7$.
7. On sait que $\pi \approx 3{,}1416$. Donc, $3{,}14 < \pi$.
   3,14 et π appartiennent à l'intervalle [-2 ; 4] sur lequel f est une fonction décroissante.
   Comme $3{,}14 < \pi$, on obtient : $f(3{,}14) > f(\pi)$

Exercice 2 :

1. Avec la formule A, Bastien devrait payer : 7 × 4,5 = 31,5 soit 31,5 €.
   Avec la formule B, Bastien devrait payer : 30 + 1,5 × 7 = 40,5 soit 40,5 €.
   Si Bastien loue 7 films, la formule A est la plus avantageuse.
2. **a)** $A(x) = 4{,}5x$ et $B(x) = 30 + 1{,}5x$
   b)

   c) La formule A est plus avantageuse quand le nombre de films loués est inférieur strictement à 10.
   La formule B est plus avantageuse quand le nombre de films loués est supérieur strictement à 10.
   Quand le nombre de films loués est égal à 10, les deux formules conduisent au même prix.

d) $A(x) - B(x) = 4{,}5x - (30 + 1{,}5x) = 4{,}5x - 30 - 1{,}5x = 3x - 30$

De plus $3x - 30 = 0$ et

$3x = 30$

$x = 10$

x	$-\infty$ 10 $+\infty$
signe de $A(x) - B(x)$	$-$ 0 $+$

On retrouve la même conclusion qu'à la question **2. c)**

Exercice 3 :

Partie A :

1.

x	a	b	c	$f(x)$
2	6	7	49	40
-4	-12	-11	121	112

2. A chaque étape de l'algorithme, on obtient les résultats suivant :

a prend la valeur $3x$

b prend la valeur $3x + 1$

c prend la valeur $(3x + 1)^2$

y prend la valeur $(3x + 1)^2 - 9$

d'où $f(x) = (3x + 1)^2 - 9$

Partie B :

1. Pour tout x réel, $f(x) = (3x + 1)^2 - 9$

$= (3x + 1)^2 - 3^2$

$= (3x + 1 - 3)(3x + 1 + 3)$

$= (3x - 2)(3x + 4)$

2. En remarquant que $(3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$, il vient $f(x) = 9x^2 + 6x + 1 - 9$

$= 9x^2 + 6x - 8.$

3. **a)** $f(-\frac{1}{3}) = (3 \times (-\frac{1}{3}) + 1)^2 - 9 = -9$

L'image de $-\frac{1}{3}$ par f est -9.

b) On résout l'équation $f(x) = 0$, soit : $(3x - 2)(3x + 4) = 0$

Or, on sait qu'un produit de deux facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Ici, $3x - 2 = 0$ ou $3x + 4 = 0$

soit $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{4}{3}$

L'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions : $\frac{3}{2}$ et $-\frac{4}{3}$

c) Pour trouver les antécédents éventuels de -8 par f, il faut résoudre l'équation :

$f(x) = -8$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x - 8 = -8$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x(3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Ainsi, -8 admet deux antécédents par f qui sont 0 et $-\frac{2}{3}$

4. **a)** A l'aide de la fonction « table » de calculatrice, on conjecture que le minimum est $-8{,}99$ et qu'il est atteint pour $x = -0{,}3$.

b) La fonction f est une fonction polynôme de degré 2. Sa courbe représentative est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées. Comme $a = 9 > 0$, la fonction f admet un minimum. Ce minimum est atteint au point d'intersection de l'axe de symétrie et de l'axe des abscisses. On sait d'après la question **3. b)** que l'équation $f(x) = -8$ a deux solutions 0 et $-\frac{2}{3}$. Donc l'abscisse du minimum est égale à $\frac{0+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{3}$. Et d'après la question **3.c)**, $f(-\frac{1}{3}) = -9$. Donc ces calculs confirment notre conjecture.

<u>Exercice 4 :</u>

1.a) $3x - 1 = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$

$-2x + 5 = 0$ équivaut à $x = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $(3x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(-2x+5)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3x-1)(-2x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-1)(-2x+5) > 0$ est l'intervalle $\left]\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right[$

2. $x + 3 = 0$ équivaut à $x = -3$

$4x + 1 = 0$ équivaut à $x = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
signe de $(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(4x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\frac{x+3}{4x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x+3}{4x+1} \geq 0$ est la réunion des intervalles $]-\infty;-3[\cup \left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$

<u>Exercice 5 :</u>

1. L'apiculteur possède 39 ruches.

2.

Production de miel (en kg)	17	19	20	21	22	23	25	27
Nombre de ruches	4	8	6	9	2	6	3	1
Effectifs cumulés croissants	4	12	18	27	29	35	38	39

3. L'effectif total est 39. On a $\frac{39}{4}$ = 9,75 donc Q_1 est la 10$^{\text{ème}}$ valeur soit $Q_1 = 19$.

De même 3 × $\frac{39}{4}$ = 29,25 donc Q_3 est la 30$^{\text{ème}}$ valeur soit $Q_3 = 23$

La médiane est 20$^{\text{ème}}$ valeur soit donc $Me = 21$

Le minimum de la série statistique est 17 et le maximum est 27.

4. La moyenne $\bar{x}$ est donnée par $\bar{x} = \frac{4\times17+8\times19+6\times20+9\times21+2\times22+6\times23+3\times25+1\times27}{39}$ = 20,8

5. La médiane de la production en 2016 est plus grande qu'en 2015. La production en 2016 semble donc plus importante.

D'autre part en 2016, l'écart-interquartile $Q_3 - Q_1$ est égal 4, alors qu'il était égal à 10 en 2015. De même l'étendue est égale à 10 en 2015 alors qu'elle était égale à 15 en 2015. Ceci signifie que la production est plus régulière en 2016 qu'en 2015.

6. La fréquence f de ruches qui produisent entre 21 et 30 kg de miel en 2016 est donnée par $f = \frac{21}{39} \approx 0{,}54$

7. On sait que la proportion p de ruches qui produisent entre 21kg et 30kg de miel par an chez un apiculteur confirmé est égale à $p = 0{,}76$.
D'après le théorème sur l'intervalle de fluctuation (les conditions d'application sont respectées), dans 95% des cas, sur un échantillon de 39 ruches, la fréquence de ruches produisant entre 21kg et 30kg de miel est située dans l'intervalle $\left[0{,}76 - \frac{1}{\sqrt{39}}\,; 0{,}76 + \frac{1}{\sqrt{39}}\right]$, soit [0,60 ; 0,92]. Or la fréquence de ruches f qui produisent entre 21kg et 30kg de miel en 2016 pour l'apiculteur amateur n'appartient pas à cet intervalle. L'apiculteur amateur doit encore faire des progrès pour devenir un apiculteur confirmé.

Exercice 6 :

1.

	Natation	Pas natation	Total
Vélo	28	54	82
Pas vélo	62	16	78
Total	90	70	160

2. $p(V) = \frac{82}{160} = \frac{41}{80}$ $\qquad$ $p(N) = \frac{90}{160} = \frac{9}{16}$

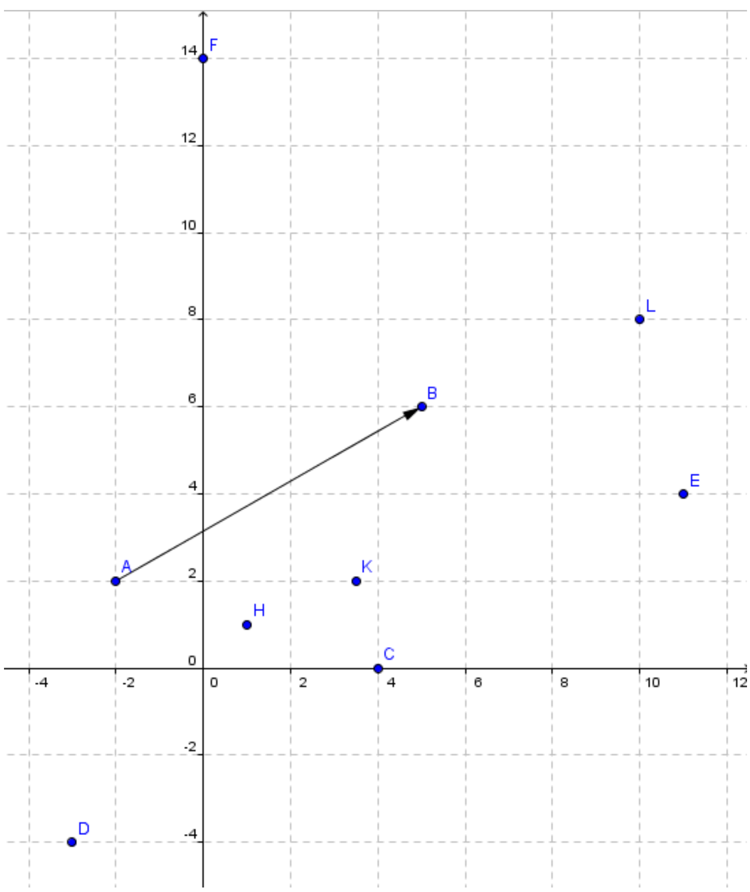
3. Evènement $V \cap N$: « l'adhérent fait du vélo **et** de la natation ».
$p(V \cap N) = \frac{28}{160} = \frac{7}{40}$

4. Evènement $V \cup N$: « l'adhérent fait du vélo **ou** de la natation ».
$p(V \cup N) = p(V) + p(N) - p(V \cap N) = \frac{82}{160} + \frac{90}{160} - \frac{28}{160} = \frac{144}{160} = \frac{9}{10}$

5. La probabilité que l'adhérent ne pratique ni le vélo ni la natation est égale à :
$p(\overline{V \cup N}) = 1 - p(V \cup N) = 1 - \frac{144}{160} = \frac{16}{160} = \frac{1}{10} = 0{,}10$

Exercice 7 :

1.



2. Construction réali

3. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées. Ils sont donc égaux. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

4. a) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{40}$ $\qquad$ $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{164}$

b) Les diagonales AC et BD du parallélogramme $ABCD$ n'ont pas la même longueur. Ce n'est donc pas un rectangle.

5. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$**.** Donc $-2\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$**.** Or, $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Or, $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$. On en déduit que $\begin{cases} x_F - x_A = 2 \\ y_F - y_A = 12 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_F = x_A + 2 \\ y_F = y_A + 12 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 14 \end{cases}$

Donc le point F a pour coordonnées $(0\ ;\ 14)$.

6. a) Le point H est le milieu des diagonales du parallélogramme, donc par exemple le milieu du segment $[AC]$. Ses coordonnées sont donc ; $x_H = \frac{x_A + x_C}{2} = 1$ et $y_H = \frac{y_A + y_C}{2} = 1$

b) ***Première méthode***

$\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} x_B - x_L \\ y_B - y_L \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} x_K - x_H \\ y_K - y_H \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $-5 = -2 \times 2{,}5$ et $-2 = -2 \times 1$. On peut donc écrire $\overrightarrow{LB} = -2\overrightarrow{HK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{LB}$ et $\overrightarrow{HK}$sont donc colinéaires et par suite les droites (LB) et (HK) sont parallèles.

Deuxième méthode

Les droites (LB) et (HK) ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées. Elles ont pour coefficient directeur :

- coefficient directeur de (LB) : $a = \frac{y_B - y_L}{x_B - x_L} = 0{,}4$

- coefficient directeur de (HK) : $a' = \frac{y_K - y_H}{x_K - x_H} = 0{,}4$

On constante que les droites (LB) et (HK)ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles.

7. D'après la question **6.b)** on sait que le coefficient directeur de la droite (HK) est égal à 0,4**.** Toute droite parallèle à la droite (HK) a donc pour équation : $y = 0{,}4\,x + b$. Celle qui passe par le point A est telle que :

$y_A = 0{,}4\,x_A + b$ c'est-à-dire $2 = 0{,}4 \times (-2) + b$ donc $b = 2{,}8$

L'équation cherchée (celle de la droite parallèle à la droite (HK) passant par A) s'écrit donc $y = 0{,}4\,x + 2{,}8$

8. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$

<u>**Exercice 8 :**</u>

1. Le point I est un point du plan :
   a) (ABC) $\qquad$ **b)** (ABD)

2. Les droites (DC) et (KJ) sont :
   a) sécantes $\qquad$ **c)** coplanaires

3. Les droites (IJ) et (BD) sont :
   c) non coplanaires